

ТАМАҚ ӨНДІРІСІНДЕГІ КЕПТІРУ КИНЕТИКАСЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

М.А. АДИБЕКОВ , А.А. ОРМАНБЕКОВА , С.А. АБДУКАРИМОВ ,
Ж.Е. КАРАТАЕВА* , З.А. ДЖУМАБЕКОВА 

(Алматы технологиялық университеті,
Қазақстан Республикасы, 050012, Алматы қ., Төле би көш., 100)
Автор-корреспонденттің электрондық поштасы: zhanna_karataeva68@mail.ru*

Зерттеу жұмысы тамақ өнімдерін кептіру кинетикасын математикалық модельдеу мәселелеріне арналған. Қазіргі кезеңде тамақ технологиясында жылу және масса алмасу процестерін терең түсіну өнім сапасын арттыру мен энергия үнемдеуді қамтамасыз етудің маңызды шарты болып табылады. Зерттеудің негізгі мақсаты – кептіру процесінде жылу және масса алмасу заңдылықтарына сүйене отырып, өнімнің ылғал шығару кинетикасын сипаттайтын математикалық модель құру және оны өндірістік жағдайларда қолдану мүмкіндігін анықтау. Жұмыстың ғылыми идеясы — кептірудің физикалық процестерін математикалық теңдеулер арқылы сипаттау арқылы өнімнің сапасын сақтай отырып, технологиялық тиімділікті арттыру. Мақалада жылу және масса алмасу құбылыстарын сипаттайтын Фик, Нуссельт және Рейнольдс критерийлеріне негізделген модельдеу әдістемесі келтірілген. Модельдеуде стационарлы емес жылуөткізгіштік теңдеулері, бастапқы және шекаралық шарттар жүйесі қолданылып, дифференциалдық теңдеулер сандық әдіспен шешілді. Зерттеу нәтижесінде кептіру уақыты мен энергия шығынын азайтуға мүмкіндік беретін тиімді режимдер анықталды. Ұсынылған модель өнімнің ылғал құрамының динамикасын дәл сипаттап, жылуалмасу аппараттарының жұмыс параметрлерін оңтайландыруға мүмкіндік береді. Жұмыстың ғылыми құндылығы — кептіру кинетикасын математикалық жолмен сипаттау арқылы процестерді басқарудың негізін қалыптастыруында. Практикалық маңыздылығы — алынған модельдерді тағам өндірісінің автоматтандырылған жүйелерінде, кептіргіш аппараттардың жобалау және энергия үнемдеу технологияларын жетілдіру саласында қолдануға болады.

Негізгі сөздер: математикалық модель, кептіру кинетикасы, масса алмасу процесі, жылу және масса алмасу, тамақ технологиясы, энергия тиімділігі, сандық модельдеу.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ СУШКИ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

М.А. АДИБЕКОВ, А.А. ОРМАНБЕКОВА, С.А. АБДУКАРИМОВ,
Ж.Е. КАРАТАЕВА*, З.А. ДЖУМАБЕКОВА

(Алматынський технологічний університет, Республіка Казахстан, 050012, г. Алматы, ул. Төле би, 100)
Электронная почта автора-корреспондента: zhanna_karataeva68@mail.ru*

Исследовательская работа посвящена вопросам математического моделирования кинетики сушки пищевых продуктов. В современном этапе развития пищевых технологий глубокое понимание процессов тепло- и массообмена является важным условием повышения качества продукции и обеспечения энергосбережения. Основная цель исследования – построение математической модели, описывающей кинетику влагоудаления продукта на основе закономерностей тепло- и массообмена, а также определение возможности применения данной модели в промышленных условиях. Научная идея работы заключается в повышении технологической эффективности и сохранении качества продукции за счёт описания физических процессов сушки с использованием математических уравнений. В статье представлена методика моделирования, основанная на критериях Фика, Нуссельта и Рейнольдса, описывающих явления тепло- и массообмена. При моделировании использованы нестационарные уравнения теплопроводности, система начальных и граничных условий, а также численные методы решения дифференциальных уравнений. В результате исследования определены оптимальные режимы, позволяющие сократить время сушки и снизить энергозатраты. Разработанная модель точно описывает динамику влагосодержания продукта и даёт возможность оптимизировать рабочие параметры

теплообменных аппаратов. Научная новизна работы заключается в формировании основы управления процессами сушки с использованием математического описания их кинетики. Практическая значимость заключается в возможности применения модели в автоматизированных системах пищевого производства, при проектировании сушильных аппаратов и совершенствовании энергосберегающих технологий.

Ключевые слова: математическая модель, кинетика сушки, процесс массообмена, тепло- и массообмен, пищевая технология, энергоэффективность, численное моделирование.

MATHEMATICAL MODELING OF DRYING KINETICS IN FOOD PRODUCTION

M.A. ADILBEKOV, A.A. ORMANBEKOVA, S.A. ABDUKARIMOV,
ZH.Y. KARATAEVA*, Z.A. DZHUMABEKOVA

(Almaty Technological University, Kazakhstan, 050012, Almaty, Tole bi str., 100)
Corresponding author e-mail: zhanna_karataeva68@mail.ru*

The research work is devoted to the mathematical modeling of drying kinetics in food products. At the current stage of food technology development, a deep understanding of heat and mass transfer processes is an essential condition for improving product quality and ensuring energy efficiency. The main goal of the study is to develop a mathematical model describing the kinetics of moisture removal from the product based on the laws of heat and mass transfer, as well as to determine the feasibility of applying this model under industrial conditions. The scientific idea of the work is to enhance technological efficiency and maintain product quality by describing the physical processes of drying through mathematical equations. The article presents a modeling methodology based on Fick, Nusselt, and Reynolds criteria that describe the phenomena of heat and mass transfer. The modeling involves unsteady-state heat conduction equations, a system of initial and boundary conditions, and the use of numerical methods for solving differential equations. The study identified optimal drying regimes that allow reducing the drying time and energy consumption. The proposed model accurately describes the dynamics of moisture content in the product and enables optimization of heat-exchange equipment operating parameters. The scientific contribution of this work lies in the establishment of a foundation for controlling drying processes through mathematical characterization of their kinetics. The practical significance lies in the application of the developed model in automated control systems of food production, in the design of drying equipment, and in improving energy-saving technologies.

Keywords: mathematical model, drying kinetics, mass transfer process, heat and mass transfer, food technology, energy efficiency, numerical modeling.

Kіpіcne

Тамақ өнімдерін кептіру процестері – тамақ технологиясының ең маңызды бағыттарының бірі, өйткені олар өнімнің сақтау мерзімін ұзартып, физика-химиялық қасиеттерін тұрақтандыруға мүмкіндік береді. Соңғы жылдары бұл процестердің күрделенуі мен энергия тиімділігі мәселесі өзекті болып отыр. Осыған байланысты кептіру кинетикасын дәл сипаттайтын математикалық модельдер құру қажеттілігі туындады.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі – кептіру кезінде жүретін жылу және масса алмасу құбылыстарын теориялық негізде сипаттай отырып, өндірістік процестердің тиімділігін арттыру. Бұған дейінгі зерттеулер (Лыков, Бухмиров, Хан және Актер еңбектері) негізінен физикалық модельдерге сүйенген, алайда

процестің көппараметрлі табиғатын толық қамти алмайды.

Зерттеу объектісі – тамақ өнімдерін кептіру процесіндегі жылу және масса алмасу.

Зерттеу пәні – кептіру кинетикасын сипаттайтын математикалық модель.

Мақсаты – кептіру процесінің температуралық және ылғалдық өрістерін сипаттайтын теңдеулер жүйесін құрастыру және оның тиімді режимдерін анықтау.

Әдістер: дифференциалдық теңдеулер жүйесін сандық әдіспен шешу, эксперименттік салыстыру, жылу және масса алмасу заңдарын қолдану.

Гипотеза – кептіру процесінің кинетикасын математикалық түрде сипаттау арқылы өнім сапасын сақтап, энергия шығынын азайтуға болады.

Заттардың бір фазадан екіншісіне ауысуының негізгі заңдылықтарын массаны тасымалдау теориясы айқындайды, соған сәйкес масса беру жылдамдығы қозғаушы күшке пропорционалды болады. Оның шамасы фазалық тепе-теңдік заңдары негізінде анықталады. Массаның тасымалдануының қозғаушы күштерін концентрациялар, температуралар мен қысымдардың айырмашылықтары арқылы есептейді. Бір фазаның шегіне диффузиялық ағынға перпендикулярлы F беті арқылы фазалардың бөліну шекарасына келетін заттың мөлшері Фик заңымен анықталады [1]:

$$M = -DF\Delta c\tau.$$

мұндағы D - пропорционалдық (диффузия) коэффициенті; Δc - концентрация айырмасы (қозғаушы күш); τ - көшіру уақыты.

Фазалар бөлімінің шекарасына (немесе шекарасынан) зат мөлшерінің жиынтық көшуі массалық берудің теңестірілуімен айқындалады:

$$M = \beta F(c_T - c_B)\tau,$$

мұндағы β - пропорционалдық (массалық қайтарым) коэффициенті; c_T , c_B - фазалардың бөліну шекарасында және ағынның ішінде (ядросында) шоғырлану.

Массаберу коэффициенті диффузин коэффициентінен өзгеше кинетикалық сипаттама болып табылады және диффузия коэффициентіне (физикалық константа), v ағынының жылдамдығына, ρ тығыздығына және μ заттың тұтқырлығына, l_1 бөлшектерінің геометриялық өлшемдеріне, l_2 аппараттарына және т.б. байланысты болады. Жалпыланған түрде бұл тәуелділік [2] функциясымен ұсынылуы мүмкін:

$$\beta = F(D, v, \rho, \mu, l_1, l_2 \dots)$$

немесе критерналды формада:

$$Nu_D = A Re^m Pr_D^n$$

мұндағы $Nu_D = \beta l/D$, $Pr_D = \nu/D$ - Нуссельт пен Прандльдің диффузионды сандары; Re - Рейнольдс саны; l - анықтаушы геометриялық өлшем; ν - кинематикалық тұтқырлық коэффициенті.

Келтірілген арақатынастар жылу және масса беру процестерінің аналогтары туралы куәландырады, бұл математикалық үлгілерді

құрастыру әдістерін қорытындылауға мүмкіндік береді.

Масса алмасу процестерінің жұмысын талдау үшін кинетикалық заңдылықтар өте маңызды болып табылады, олар массаалмасу процесінің әрбір түрі үшін өзіндік ерекше нысанға ие.

Зерттеу материалдары мен әдістері.

Массаалмасу процестері қоспадан қандай да бір компонентті (затты) бөлуге немесе ажыратуға (тазартуға) арналғандықтан, бұл процестердің негізгі технологиялық міндетін қажетті тазалық дәрежесіндегі (96% спирт, 8% ашытқы ылғалдылығы және т.б.) белгілі бір заттың берілген мөлшерін алу ретінде тұжырымдауға болады. Кейбір жағдайларда (мысалы, тазарту кезінде) міндет басқаша тұжырымдалуы мүмкін: мысалы, негізгі өнімде зиянды компоненттің болуы.

Негізгі технологиялық міндетке қол жеткізілген жағдайда массаалмасу процесінің сапасы жылу, су, электр энергиясының күрделі, пайдалану және т.б. шығындарымен бағаланады. Жалпы бағалау туралы қосымша дайын өнім бірлігін өндіруге жұмсалынған шығындар болып табылады. Осы негізде жаппай алмасу процестерін жетілдірудің жалпы мақсаттарын да тұжырымдауға болады: бөлу тазалығының дәрежесін арттыру және өнім бірлігіне қатысты меншікті шығындарды төмендету. Бұл мақсаттарға қолданыстағы аппаратураны жетілдіру және жаңа аппаратураны әзірлеу, оңтайлы режимдерді таңдау, аппараттар жұмысының тұрақтылығы мен сенімділігін арттыру, басқару процестерін автоматтандыру және т.б. жөніндегі көптеген жеке міндеттерді шешу арқылы қол жеткізілуі мүмкін.

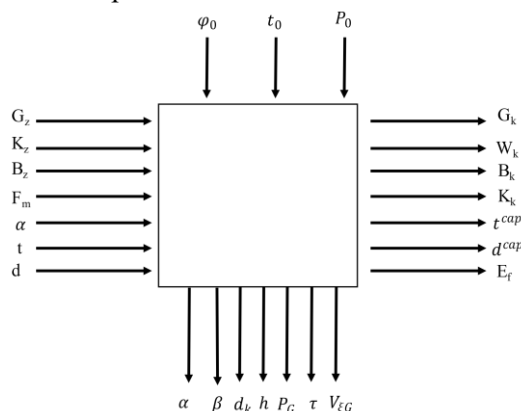
Мұндай жеке мәселелерді көптеген жағдайларда математикалық модельдер арқылы шешуге болады [3,4]. Барлық жаппай алмасу процестерінің ішінен тамақ кәсіпорындарында таралғандардың бірі, ол кептіру процесі болып табылады. Мұнда математикалық модельдеу әдістерімен масса алмасуды жетілдірудің кейбір міндеттерін шешуді, сондай-ақ сұйық және газ фазаларының масса алмасуының ерекшелігіне байланысты айдау процесін модельдеу ерекшеліктерін қарастырамыз.

Нәтижелер және оларды талқылау

Кептіру кинетикасының математи-калық модельдері

Кептіру – ол типтік масса алмасу процесі болып табылады, мұнда ылғал кептірілетін материалдан кептіру агентіне ауысады. Түрлі тамақ өнімдерін, жартылай фабрикаларды және

шикізатты (дән, уыт, барду, азықтық және тағамдық ашытқылар, крахмал және т.б.) кептіреді. Кейбір тамақ өндірістерінде кептіру - негізгі технологиялық процесс (кептірілген нан, құрғақ сүт, жұмыртқа ұнтағы, құрғақ жемістер мен көкөністер өндірісі) болып табылады. Кептіру процесі кептірілетін өнімге жылу әкелумен байланысты, соның арқасында ылғал буланады. Кептіргіш агент ретінде ауа, қыздырылған бу және кептірілетін материалдан



Сурет 1. Кептіру процесінің параметрлік схемасы

Кептіру процесінің негізгі технологиялық мақсаты сапаны сақтай отырып, кептірілетін өнім ылғалдылығының берілген мәнін қамтамасыз ету болып табылады. Процестің сапасы алынған ылғал массасының бірлігіне қатысты меншікті шығындармен бағаланады. Басқарылатын параметрлер мен басқарушылық әсерлерді тандау зерттеу міндеттерімен айқындалады. Көбінесе басқарылатын параметрлер ылғалдылық пен кептіру шығындарын қабылдайды. Кептірілген материалдың сапасы, әдетте, өнімнің сапасы негізгі шектеуі болып табылады. Кептіру кезінде материалдың сапасы қыздыру температурасы мен экспозициямен анықталатындықтан, бұл параметрлер - негізгі шектеулер. Басқару әсерлерін кептіру агентінің параметрлері: шығын (жылдамдық) және температура, ал кейде кептірілетін материалдың шығыны ретінде қабылдайды.

Кіріс және шығыс параметрлері арасындағы байланыстарды орнату үшін әртүрлі тәсілдер мен әдістер қолданылады. Бұл байланыстар материалдық және энергетикалық теңгерім теңдеулерін, гидромеханика, жылу және масса алмасу заңдарын және т.б. пайдалану негізінде талдамалы түрде белгіленуі мүмкін. Мысалы, кептірілетін материалдың бастапқы және соңғы ылғалдылығының арасында байланыс орнату үшін кептіру кинетикасының

буланатын ылғалдылықпен қанықтырылатын оттық газдары қолданылады.

Кептіру процесінің негізгі параметрлері ретінде кептірілетін материал мен кептіру агентінің сипаттамалары болып табылады (1-сурет): G шығын, материалдың бастапқы ылғалдылығы (немесе ылғалдылығы), оның температурасы, қозғалыс жылдамдығы v , қабаттың қалыңдығы h .

теңдеуі, ал кептірілетін агенттің температурасы мен кептірілетін материал арасында тәуелділікті орнату үшін - жылу алмасу теңдеуі пайдаланылады. Параметрлердің көп саны арасында байланыс орнататын неғұрлым күрделі модельдер үшін барлық аталған талдамалық және эксперименттік тәуелділіктерді бірлесіп қарау қажет. Параметрлер арасында байланыстар орнатудың эксперименттік әдістері әртүрлі жоспарлар - белсенді және пассивті әдістер бойынша физикалық немесе заттай модельдер жасауды талап етеді.

Кептіру процесінің экономикалық көрсеткіштері жабдықтың құнын, жұмыстарды орындауға арналған қолданыстағы нормалар мен бағаларды ескере отырып, әртүрлі модельдер негізінде тікелей өлшеу немесе есептеу арқылы алынған техникалық сипаттамалар негізінде есептелуі мүмкін.

Кептіру үш кезеңнен тұратындықтан, қыздырудың, кептірудің және кептірілетін материалды салқындатудың математикалық үлгілерін жасау кезінде масса мен энергияны берудің негізгі заңдары қолданылады. Кептіру кезінде негізінен конвективті масса алмасу орын алғандықтан, гидродинамиканың негізгі заңдылықтарын да ескеру қажет.

Кептірілетін материалды қыздырудың, кептірудің және салқындатудың математикалық үлгілерін жасау кезінде осы заңдылықтарды

сипаттайтын теңдеулер әртүрлі нысанда пайдаланылады. Кептіру процесін талдау үшін әдетте ылғалды денелердегі жылу және ылғал

өткізуді сипаттайтын дифференциалды теңдеулер жүйесін негізге алады.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k_{11} \nabla^2 u + k_{12} \nabla^2 t + k_{13} \nabla^2 P \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= k_{21} \nabla^2 u + k_{22} \nabla^2 t + k_{23} \nabla^2 P \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= k_{31} \nabla^2 u + k_{32} \nabla^2 t + k_{33} \nabla^2 P \end{aligned} \right\} (1)$$

K коэффициенті ылғалды материалдың термодинамикалық және жылуфизикалық қасиеттерімен сипатталады

$$k_{11} = a_m; k_{12} = a_m \delta; k_{13} = \frac{k_p}{\rho_0}; k_{21} = \frac{2\varepsilon}{c}; k_{22} = a + \frac{v}{c} a_m \delta; \\ k_{23} = \varepsilon r = \frac{a_m}{c} \delta_p; k_{31} = \frac{-\varepsilon a_m}{c_p}; k_{32} = \frac{-\varepsilon a_m}{c_p} \delta; k_{33} = \left(a_p - \frac{-\varepsilon a_m}{c_p} \delta_p \right).$$

Мұнда қосымша мынадай белгілер енгізілген:

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - Лаплас операторы; $a = \lambda/c_p$ - температура өткізгіштік коэффициенті; a_m - ылғалдың диффузия коэффициенті; δ - ылғал термодиффузиясының салыстырмалы коэффициенті; δ_p - термоградиенттік коэффициент; ε - фазалық өзгеру критерийі; r - фазалық айнарудың үлестік жылу сыйымдылығы; c_p - кеуекті денедегі ылғалды ауа сыйымдылығының коэффициенті; x, y, z - координаттары; ρ_0 - ылғалды дененің құрғақ скелетінің тығыздығы.

Бір өлшемді міндеттер үшін жалпы қысым градиенті болмаған кезде теңдеу жүйесі оңайлатылады

$$\left. \begin{aligned} c\rho_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \varepsilon r \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial u}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} (2)$$

Мұнда $a_m, \delta, \lambda, c, \varepsilon, r$ барлық жылу физикалық және термодинамикалық сипаттамалары t температурасы мен ылғал құрамының функциялары болып табылады.

Келтірілген теңдеулер жүйесін шешу үшін температураның және ылғал құрамының дене ішінде уақыттың бастапқы сәтінде таралуын (бастапқы жағдайлар), дененің геометриялық нысанын және қоршаған ортаның дене беті арасындағы өзара әрекеттесу заңын (шектік жағдайлар) білу қажет. Бастапқы және шекара шарттарының жиынтығы ең қарапайым жағдайда шеткі жағдайларды құрайды.

Шекара шарттардың берілу тәсілдері

Шекаралық шарттар төрт тәсілмен берілуі мүмкін. Бірінші түрдің шекаралық шарты дене бетіндегі температураны уақыт бойынша бөлу тапсырмасынан тұрады, яғни $t_n(\tau) = f(\tau)$ (Дирихле міндеті), екінші түрдегі - дене бетінің әрбір нүктесі үшін жылу ағынының тығыздығын (температурадан туындайтын) уақыт функциясы ретінде $q_n(\tau) = f(\tau)$ (Нейман міндеті), үшінші түрдегі - қоршаған орта температурасының тапсырмасы мен жылу алмасу заңдылығы бойынша:

$$q_n = \alpha[t_n(\tau) - t_c(\tau)], (3)$$

мұнда t_c - қоршаған ортаның температурасы

Төртінші түрдің шекаралық шарты жылу өткізгіштік заңы бойынша дененің қоршаған ортамен жылу алмасуына немесе бетінің температурасы бірдей болған кезде жанасатын қатты денелердің жылу алмасу жағдайына сәйкес келеді (мінсіз жылулық байланыс).

Дене ішіндегі температураны уақыттың бастапқы сәтінде бөлу бастапқы шартпен беріледі

$$t = (x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Температураны біркелкі бөлген кезде бастапқы шарт

$$t(x, y, z, 0) = t_0 = \text{const.}$$

Шешімнің бірдейлігі туралы теоремаға сәйкес, егер $f(x, y, z, \tau)$ функциясы дифференциалды теңдеуді және бастапқы шектік жағдайларды қанағаттандырса, онда ол біртекті болып табылады.

Берілген шеткі жағдайлардың болуы қарапайым жағдайларда жылу өткізгіштіктің тікелей міндеттерінің талдамалық шешімдерін алуға, яғни келесі функцияны табуға мүмкіндік береді.

$$t_n = f(x, y, z, \tau).$$

Жылу алмасудың шекті шарттарына ұқсас массаалмасу кезінде дене бетінің қоршаған ортамен өзара іс-қимылы да төрт тектің шекті шарттарымен сипатталуы мүмкін.

Бірінші түрдің шекаралық жағдайлары дененің үстіңгі бетіндегі диффузиялық масса

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_n + q_n(\tau) - r(1 - e)q_n(\tau) &= 0 \\ a_m \rho_0 \left(\frac{du}{dx} \right)_n + a_m \rho_0 \delta \left(\frac{dt}{dx} \right) + q_m(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

мұндағы q_n, q_m - беттегі тиісінше жылу мен ылғалдың үлестік ағындары.

$\tau = 0$ кезінде бір өлшемді ағын үшін бастапқы шарттардың түрі мынадай:

$$m = f(x) \text{ және } t_m = f_1(x).$$

Теңдеу жүйесі (1) және шекаралық шарттар ылғалды денелердегі және бинарлық бу-газ ортасындағы (кептіру агенті) сұйықтықтардағы конвективті диффузия кезіндегі жылу және масса алмасудың математикалық сипаттамасын құрайды. Жылжымалы орта үшін теңдеулерге ортаның қозғалыс жылдамдығын қамтитын мүшені енгізу қажет. Шекаралық жағдайларды жазу нысаны жылу және масса алмасу түріне, ортаның геометриялық нысанына және координаталардың таңдалған жүйесіне байланысты болады.

Материалды қыздырудың, кептірудің және салқындатудың математикалық үлгілерін құру кезінде келтірілген математикалық тәуелділіктер әртүрлі жорамалдарды енгізумен жеңілдетіледі, олар математикалық үлгілердің дәлдігін төмендетеді, бірақ күрделі процестерді

тасымалы әлеуеті қоршаған ортадағы масса тасымалы әлеуетіне тең болған жағдайға сәйкес келеді; екінші түрдегі - бірінші кезеңде кептіру қарқындылығы тұрақты болғанда, ал екінші кезеңде төмендегенде ылғалды денелерді кептіру кезінде массаалмасу жағдайы. Демек, шекті жағдайларда уақыт функциясы $g_m = f(\tau)$ ретінде зат массасы ағынының тығыздығы беріледі, ал жеке жағдайда - $g_m = \text{const}$.

Үшінші түрдің шекаралық жағдайлары жылу алмасудың шекаралық жағдайларына ұқсас, ал төртінші түрі екі орта арасындағы молекулалық жылу алмасуды сипаттайды. Жалпы жағдайда шекаралық шарттарды былай жазуға болады:

шешу үшін салыстырмалы түрде қарапайым және қолжетімді әдістермен және құралдармен ұсынуға мүмкіндік береді.

Мұндай жорамалдар күрделі көп өлшемді денелер мен кеңістіктерді бір өлшемді болуы: кеңістіктер мен күрделі пішінді денелерді қарапайым элементтерге бөлу; температура мен ылғал құрамының өзгеруінің қаралып отырған диапазондарындағы жылу физикалық және термодинамикалық сипаттамалардың өзгермеуі; соңғы нәтижелерге елеусіз әсер ететін мүшелерді теңдеулерден алып тастау және жазба нысанын жеңілдету үшін координаттар жүйесін өзгерту.

Мұндай сипаттамалардың күрделілігіне және жеткіліксіз дәлдігіне, сондай-ақ теңдеу жүйелерін шешу әдісінің болмауына немесе күрделілігіне байланысты кептіру процестерін сипаттаудың неғұрлым қарапайым нысандары жиі пайдаланылады.

Кептіру кинетикасы кептіру қисық сызығының әртүрлі нысандары түрінде ұсынылады. Ең кең таралған нысан А.В. Лыковтың теңдеуі болып табылады:

$$W = W_p + (W_n - W_p) \exp(-k\tau) \quad (5)$$

мұндағы W, W_p, W_n - материалдың ағымдағы, тепе-теңдік және бастапқы ылғалдылығы; k - ортаның температурасы мен ылғалдылығының функциясы болып табылатын

кептіру коэффициенті, $k = f(t, \varphi)$. Кейбір жағдайларда жазудың мынадай нысанын ұтымды қолдануға болады:

$$W = W_p + (W_n - W_p) \exp(-a + b/2 \tau),$$

мұнда a, b - ылғалдың материалмен байланысын сипаттайтын коэффициенттер. Осы материал үшін тепе-теңдік ылғалдылық $W_p = f(t, \varphi)$ кептіру агентінің температурасы мен салыстырмалы ылғалдылығының

функциясы болып табылады. Сондықтан, $W_{y.n} = W_n - W_p$ және $W_y = W - W_p$ (қашықтағы ылғал) белгілерін пайдалана отырып, кептіру кинетикасын келесі түрде жазамыз:

$$W_y = W_{y.m} \exp - \{k(t, \varphi)(a + b/2 \tau)\} \quad (6)$$

Бұл теңдеуде $k(t, \varphi)$ режимді, ал $(a + b/2 \tau)$ - ылғалдың материалмен байланысын сипаттайды. Осы сипаттамалардың екеуі де кептіру қисық сызықтарының сипаттамаларын белгілі деп есептей отырып, эксперименттің көмегімен белгілейді.

Дифференциалды формадағы (5) немесе (6) теңдеуді ұсына отырып және АВМ-дағы осы дифференциалды теңдеуді жинақтаудың құрылымдық схемасын жасай отырып, кинетиканы зерттеуге арналған модельді алуға болады. Осы салыстырмалы қарапайым міндетті шешу үшін автоматты басқару жүйелерінде арнайы есептеу құрылғысы қолданылады, бұл өнімнің бастапқы ылғалдылығы өзгерген кезде кептіру

кинетикасын есептеу міндеттерін бірнеше рет шешуге мүмкіндік береді.

Кептіру процесінде астықтың ылғалдылығын анықтау міндеті

(1) теңдеулер жүйесі түріндегі өнім мен кептіру агентінің ылғал құрамы мен температура туының математикалық сипаттамаларына негізделген модельдер неғұрлым күрделі болып табылады. Осындай математикалық үлгілерді құрастырудың мысалы ретінде кептіру процесінде ылғал құрамы мен температура өрісінің математикалық сипаттамасы бойынша астықтың ылғалдылығын анықтау міндетін қарастырайық. Бұл сипаттама бастапқы шекаралық шарттармен бірге мынадай түрде болады:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_2 \frac{\partial u}{\partial x} - am \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{A(v_{c.a})}{c_3 \rho} (t - t_{c.a}) - \frac{\rho_3}{c_3} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u_3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$u(\tau, x) = \frac{2}{R^3} \int_0^R \tau u(\tau, x, r) dr$$

бастапқы шарттары

$$\left. \begin{aligned} t(\tau, 0) &= f(\tau) \\ u(0, x, r) &= u_0(x, r) \\ t(0, x) &= f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

шекаралық шарттары және $(\tau, 0, r) = u^0(\tau, r)$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\tau, x, R) = \begin{cases} -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t)}(u_R - u_0), u_R \leq u_r \\ -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t)}(u_r - u_0), u_R > u_r \end{cases} \quad (9)$$

мұндағы $\partial u / \partial r(\tau, x, R) = 0$ – симметрия шарты; R – бөлшектер радиусы; A, B – эмпирикалық коэффициенттер; x, r – кептіру камерасының ұзындығы және астық қорабының радиусы бойынша координаттары.

Келтірілген екі теңдеу жүйесі материал мен кептіру агентінің айқаспалы қозғалысы

жағдайында астықты тығыз қайнаған қабаттарда кептіру процесін сипаттайды. Егер режим бұзылмаса, яғни кептіру процесі стационарлық жағдайда өтсе және $\partial u / \partial \tau = 0$; $\partial t / \partial \tau = 0$ болса, онда теңдеу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a_m(f)}{u_3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{Av_{c,a}}{c_3 \rho_3 v_3} (t_{c,a} - t) - \frac{2\rho B(t, v_{c,a})}{c_3 v_3 R} (u_R - u_P) \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= (x, 0) = 0 \text{ (симметрии)} \end{aligned} \right\} (10)$$

бастапқы шарттары:

$$u(0, r) = u_0(r); t(0) = t_0 \quad (11)$$

және шекаралық шарттары:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x, R) = \begin{cases} -\frac{B(t, v_{c,a})}{Gm(t_3)} (u_R - u_P), & u_R \leq u_r \\ -\frac{B(t, v_{c,a})}{um(t)} (u_r - u_P), & u_R > u \end{cases} \quad (12)$$

Теңдеу жүйесіне көшу кезінде (10-12) кептірудің орташа жылдамдығының үстіңгі бетіндегі ылғал құрамымен байланысы ескерілген:

$$\Delta u = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \Delta u dr = \frac{2}{R} * \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} * \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2B}{R} (u_R - u_P)$$

Бұрын жылу тасығыштардың температурасын бөлу міндетін шешу үшін қолданылатын тура әдісті пайдалана отырып, жеке туынды

теңдеулер жүйесін кәдімгі дифференциалды теңдеулер жүйесіне келтіреміз, ақырғы-айырмашылық арақатынастарды жазамыз:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} = \frac{u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1}}{R^2},$$

мұнда $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$; n - $r = R$ -ге қатысты тұзудің нөмірі; h - кептіру материалының радиусы бойынша интервалы.

$r = kh$ екенін ескере отырып, аламыз:

$$(\Delta u)_k = \frac{1}{2h^2 k} ((2k+1)u_k - 4ku_k + (2k-1)u_{k-1}),$$

соңғы нөмірлі $k=n$ түзуі үшін:

$$(\Delta u)_n = \frac{2}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u_n - u_{n-1}}{n} \right) + \frac{1}{R} * \frac{du}{dr},$$

мұнда n - $r = R$ -ге қатысты түзу нөмірі.

Егер $n=R/4$ болса, онда теңдеулер жүйесі келесі түрде болады:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{a_m(t)}{v_3 R^2} (24u_2 - 24u_1); \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \frac{a_m(t)}{v_3 R^2} (20u_3 - 32u_2 - 12u_1) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} &= \frac{a_m(t)}{v_3 R^3} \left(\frac{5}{3}u_4 - 32u_3 - \frac{40}{3}u_2 \right) \\ \frac{\partial u_4}{\partial x} &= -\frac{9B(t_1, v_{c,a})}{v_3 R} (u_4 - u_P) + \frac{32a_m(t)}{v R^2} (u_3 - u_4); \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{A(v_{c,a})}{c_2 \rho_3 v_3} (t_{c,a} - t) - \frac{2\rho B(t_1, v_{c,a})}{c_3 v_3 R} (u_4 - u_5) \end{aligned} \right\} (13)$$

Бастапқы шарты:

$$\begin{aligned} u(0) &= u \\ t(0) &= t \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Уақыт координаты үшін ақырғы-айырмалы әдісті қолдана отырып, аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_{k+1} - u_k}{R} + 0(g)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} = \frac{l_{k+1} - l_k}{g} + 0(g)$$

мұнда g – уақыт интервалы.

Орнына қойған соң теңдеулер жүйесі келесі түрде болады:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{k,1}}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g}(U_{k,1} - U_{k-1,1}) + \frac{a_m t_3}{R^2}(24u_{k,2} - 24u_{k,1}); \\ \frac{\partial u_{k,2}}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g}(u_{k,2} - u_{k-1,2}) + \frac{a_m t_3}{R^3}(20u_{k,3} - 32u_{k,2} + 12u_{k,1}); \\ \frac{\partial u_{k,4}}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g}(u_{k,4} - u_{k-1,4}) + \frac{9b(t_3 v_{c,a})}{R}(u_{k,4} - u_k) + \frac{32a_m}{R^3}(u_{k,3} - u_{k,4}); \\ \frac{\partial t_k}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g}(t_k - t_{k-1}) + \frac{A(v_c)}{c_3 \rho_3}(t_{c,a}^k - t_3) - \frac{2\rho B(t_3 v_{c,a})}{c_3 R}(u_{k,4} - u_o); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Бастапқы шартты қолдана отырып, теңдеулер жүйесін шешу арқылы:

$$\begin{aligned} u_{k,1}(0) &= u_{0,k} \\ t_{k,1}(0) &= t_{0,k} \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

кептіру камерасының ұзындығы және уақыт бойынша температура мен ылғал құрамының таралуын аламыз.

Теңдеу жүйесін (14) алгоритм көмегімен ЭЕМ-де іске асыруға болады. 0,1l -ге тең айнымалы

x бойынша интеграциялау қадамы үшін кептіру камерасының ұзындығы бойынша ылғал құрамының мынадай анықтамасы алынды:

$$u = \frac{2}{R^2} \int_0^R u_r \partial_r \approx \frac{2}{R^2} \cdot \frac{h}{2} (r_0 u_0 + 2r_1 u_1 + 2r_2 u_2 + 2r_3 u_3 + 2r_4 u_4) = \frac{1}{8} (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 2u_4)$$

Есепті шешуге қажетті берілгендер: $a_m = 0,622 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3/\text{с}$; тығыздық $\rho_3 = 750 \text{ кг}/\text{м}^3$; $c_3 = 1,85 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; $R = 0,0015 \text{ м}$; $u_p = 0,1 \text{ кг}/\text{кг}$; $u_r = 0,33 \text{ кг}/\text{кг}$; $r = 2400 \text{ кДж}/\text{кг}$; $A = 0,26 v_{c,a}$; $B = 0,86 \cdot 10^{-6} \text{ т}_3$; $v_{c,a} = 0,4 \text{ м}/\text{с}$; $N = 2n$; ауа ағынының көлденең қимасы $s = 0,1 \text{ м}^2$.

Қорытынды

Зерттеу нәтижесінде тамақ өнімдерін кептіру кинетикасын сипаттайтын математикалық модель жасалды.

Бұл модель жылу және масса алмасу процестерінің өзара байланысын ескеріп, энергия шығынын азайтуға және өнім сапасын сақтауға мүмкіндік береді.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы – кептіру процесін сипаттайтын жылу және ылғал теңдеулерін біріктіріп, сандық шешім алу әдісін енгізуінде.

Практикалық маңызы – ұсынылған модельді өндірістік кептіргіш аппараттарды жобалау мен басқару жүйелерінде қолдануға болады.

Болашақ зерттеулер кептіру процесін жасанды интеллект әдістерімен болжау және көпаймақты жылу жүйелерін цифрлық басқару бағытында жалғастырылмақ.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТ ТІЗІМІ

1. Akter, F., Muhury, R., Sultana, A., & Deb, U. K. (2022). A comprehensive review of mathematical modeling for drying processes of fruits and vegetables. *Journal of Food Process Engineering*.
<https://doi.org/10.1155/2022/6195257>
2. Carvalho, M. S., Martins, J. J. A., & Lima, R. P. (2022). Kinetics and mathematical modeling of drying of agricultural material. *Revista Caatinga*, 35(3), 115–126.
<https://doi.org/10.1590/1983-21252022v35n318rc>
3. de Alcântara, C. M., Moreira, I. d. S., & Cassimiro, C. A. L. (2024). Mathematical modeling of drying kinetics and technological and chemical properties of *Pereskia* sp. leaf powders. *Processes*, 12(10), 2077.
<https://doi.org/10.3390/pr12102077>
4. Chigbo, K. S., Ike, C. E., & Opara, U. L. (2024). Mathematical modeling of the effects of thickness and

temperature on drying kinetics of food products. *Food Production, Processing and Nutrition*. <https://doi.org/10.1186/s43014-024-00233-9>

5. Kılıç, A., Kızıldaş, S., & Yılmaz, M. (2025). Comprehensive evaluation of mathematical models used in thin-layer drying of foods. *Food Science & Nutrition*, 13(5), 7055–7072. <https://doi.org/10.1002/fsn3.70558>

6. Asrate, D. A., Tufa, T. A., & Tesfaye, T. (2025). Review on recent trends of food dryer technologies and modelling. *Food Systems*, 9(1), 55–73. <https://doi.org/10.1016/j.foodsys.2025.100183>

7. Elwakeel, A. E., Tayoush, A. A., & Ghanem, T. H. M. (2025). Mathematical modelling, drying kinetics, and economic analysis of a hybrid photovoltaic-thermal solar dryer for henna leaves. *Scientific Reports*, 15, 21392. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-03460-3>

8. Lončar, B., Milanović, S., & Đurović, D. (2024). Mathematical modelling approach and simulation in food drying applications. *Foods*, 13(3), 384. <https://doi.org/10.3390/foods13030384>

9. Owoh, I. P., Okonkwo, W. I., & Anyanwu, C. N. (2025). A review on modeling the drying kinetics of agricultural bio-materials and wastes. *International Journal of Research and Innovation in Applied Science (IJRIAS)*. <https://rsisinternational.org/journals/ijrias/articles/a-review-on-modeling-the-drying-kinetics>

10. Biswas, R., & Kumar, S. (2022). Thin-layer modelling of drying kinetics, rehydration and quality changes in plant foods. *Food Bioproducts and Processing*, 132, 32–44. <https://doi.org/10.1016/j.fbp.2022.02.006>

11. Mbegbu, N. N., & Eze, C. C. (2024). Thin layer drying: effect of air temperature on the drying properties and kinetics of bushbuck leaves. *Case Studies in Chemical and Environmental Engineering*, 9, 100416. <https://doi.org/10.1016/j.csee.2024.100416>

12. Kidane, H., & Abadi, B. (2025). Characterizing agricultural product drying in solar systems: mathematical modelling of drying kinetics. *SN Applied Sciences*, 7(2). <https://doi.org/10.1007/s44187-025-00362-1>

13. Амангельдиева Г.Б., Таңжарықова Г.П., Абиева Г.С., Таңжарықов П.А. (2020). Гидрогазодинамика және жылу-масса алмасу пәнінен есептер шығару бойынша оқу құралы. Қызылорда: Қорқыт Ата атындағы ҚМУ.

14. Күмісбеков С.А. (2020). Тамақ өндірісінің процестері мен аппараттары: оқу құралы. Алматы: Эверо. ISBN 978-601-7816-30-8.

15. Сарлыбаева Л.М., Аскарова Ш.К., Ахметова Н.К., Абимильдина С.Т. (2016). Тамақ өндірістерінің жалпы технологиясы: оқу құралы. Алматы: Эверо. ISBN 978-601-310-809-4.

16. Тулубаев Ф.Х., Калиев Б.К. (2022). Жылу техникасы негіздері: оқу құралы. Қостанай: А.Байтұрсынов атындағы ҚӨУ. ISBN 978-601-356-165-3.

17. Күзембаева Г., Мұхамедиева Қ., Әділбеков М. (2018). Тамақ өндірісінің жылу және масса алмасу аппараттарын есептеу: оқу құралы. Алматы: Алматы технологиялық университеті.

REFERENCES

1. Akter, F., Muhury, R., Sultana, A., & Deb, U. K. (2022). A comprehensive review of mathematical modeling for drying processes of fruits and vegetables. *Journal of Food Process Engineering*.

<https://doi.org/10.1155/2022/6195257>

2. Carvalho, M. S., Martins, J. J. A., & Lima, R. P. (2022). Kinetics and mathematical modeling of drying of agricultural material. *Revista Caatinga*, 35(3), 115–126. <https://doi.org/10.1590/198321252022v35n318rc>

3. de Alcântara, C. M., Moreira, I. d. S., & Cassimiro, C. A. L. (2024). Mathematical modeling of drying kinetics and technological and chemical properties of *Pereskia* sp. leaf powders. *Processes*, 12(10), 2077. <https://doi.org/10.3390/pr12102077>

4. Chigbo, K. S., Ike, C. E., & Opara, U. L. (2024). Mathematical modeling of the effects of thickness and temperature on drying kinetics of food products. *Food Production, Processing and Nutrition*. <https://doi.org/10.1186/s43014-024-00233-9>

5. Kılıç, A., Kızıldaş, S., & Yılmaz, M. (2025). Comprehensive evaluation of mathematical models used in thin-layer drying of foods. *Food Science & Nutrition*, 13(5), 7055–7072. <https://doi.org/10.1002/fsn3.70558>

6. Asrate, D. A., Tufa, T. A., & Tesfaye, T. (2025). Review on recent trends of food dryer technologies and modelling. *Food Systems*, 9(1), 55–73. <https://doi.org/10.1016/j.foodsys.2025.100183>

7. Elwakeel, A. E., Tayoush, A. A., & Ghanem, T. H. M. (2025). Mathematical modelling, drying kinetics, and economic analysis of a hybrid photovoltaic-thermal solar dryer for henna leaves. *Scientific Reports*, 15, 21392. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-03460-3>

8. Lončar, B., Milanović, S., & Đurović, D. (2024). Mathematical modelling approach and simulation in food drying applications. *Foods*, 13(3), 384. <https://doi.org/10.3390/foods13030384>

9. Owoh, I. P., Okonkwo, W. I., & Anyanwu, C. N. (2025). A review on modeling the drying kinetics of agricultural bio-materials and wastes. *International Journal of Research and Innovation in Applied Science (IJRIAS)*. <https://rsisinternational.org/journals/ijrias/articles/a-review-on-modeling-the-drying-kinetics>

10. Biswas, R., & Kumar, S. (2022). Thin-layer modelling of drying kinetics, rehydration and quality changes in plant foods. *Food Bioproducts and Processing*, 132, 32–44. <https://doi.org/10.1016/j.fbp.2022.02.006>

11. Mbegbu, N. N., & Eze, C. C. (2024). Thin layer drying: effect of air temperature on the drying properties and kinetics of bushbuck leaves. *Case Studies in Chemical and Environmental Engineering*, 9, 100416. <https://doi.org/10.1016/j.csee.2024.100416>

12. Kidane, H., & Abadi, B. (2025). Characterizing agricultural product drying in solar systems: mathematical modelling of drying kinetics. *SN Applied Sciences*, 7(2). <https://doi.org/10.1007/s44187-025-00362-1>

13. Amangel'dieva G.B., Tañzharyqova G.P., Abieva G.S., Tañzharyqov P.A. (2020). Hidrogazodina mika zhane zhylu-massa almasu päninen esepтер shygaru boyynsha oqu quraly. [Hydrogasodynamics and Heat and

Mass Transfer: Study Guide for Solving Problems]. Kyzylorda: Qorqyt Ata University. (In Kazakh)

14. Kumisbekov S.A. (2020). Tamaq öndirisinin protsesteri men apparattary: oqu quraly. [Processes and Apparatuses of Food Production: Textbook]. Almaty: Evero. ISBN 978-601-7816-30-8. (In Kazakh)

15. Sarlybaeva L.M., Askarova Sh.K., Akhmetova N.K., Abimuldina S.T. (2016).

Tamaq öndiristerinin jalpy tekhnologiyasy: oqu quraly. [General Technology of Food Production: Textbook]. Almaty: Evero. ISBN 978-601-310-809-4. (In Kazakh)

16. Tulubaev F.Kh., Kaliev B.K. (2022). Zhylu tekhnikasy negizderi: oqu quraly. [Fundamentals of Heat Engineering: Study Guide]. Kostanay: A. Baitursynov Kostanay Regional University. ISBN 978-601-356-165-3. (In Kazakh)

17. Kuziembraeva G., Mukhamadieva K., Adilbekov M. (2018). Tamaq öndirisinin zhylu zhane massa almasu apparattaryn esep-teu: oqu quraly. [Calculation of Heat and Mass Transfer Equipment in Food Production: Textbook]. Almaty: Almaty Technological University. (In Kazakh)